

1. Постановка задачи

Дано:

- H — высота офсетного зеркала;
- W — ширина офсетного зеркала;
- d — максимальная глубина зеркала.

Требуется найти:

- F — фокусное расстояние;
- L_{bottom} — расстояние от фокуса до нижнего края зеркала;
- L_{top} — расстояние от фокуса до верхнего края зеркала;
- L_{side} — расстояние от фокуса до крайних боковых точек зеркала;
- α — угол между отрезками, соединяющими фокус с нижним и верхним краями зеркала;
- D_{orig} — диаметр материнской прямофокусной антенны, из которой вырезана офсетная.

2. Парабола, фокус и директриса

Парабола — это множество точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от фиксированной точки S (фокуса) и от фиксированной прямой (директрисы).

Введем координаты: горизонтальную ось назовем y , а вертикальную — z . Пусть вершина параболы лежит в начале координат O , ось параболы направлена вдоль оси z , фокус находится в точке $S = (0, F)$, а директриса — это горизонтальная прямая $z = -F$. Число F и есть фокусное расстояние.

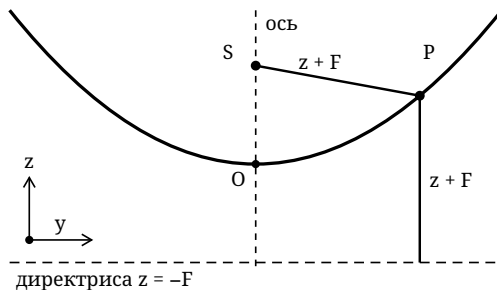


Рис. 1. Парабола: расстояние от фокуса до точки равно расстоянию до директрисы.

Возьмем произвольную точку параболы $P = (y, z)$. Расстояние от нее до директрисы измеряется по вертикали и равно $z + F$. Расстояние до фокуса вычислим по теореме Пифагора. Катеты равны y и $z - F$, поэтому:

$$SP = \sqrt{y^2 + (z - F)^2}$$

По определению параболы:

$$\sqrt{y^2 + (z - F)^2} = z + F$$

Возведем обе части в квадрат и раскроем скобки:

$$y^2 + z^2 - 2Fz + F^2 = z^2 + 2Fz + F^2$$

Слагаемые z^2 и F^2 сокращаются, остается $y^2 = 4Fz$, то есть:

$$z = \frac{y^2}{4F}$$

2.1. Переход к параболоиду

Настоящая антенна — это параболоид вращения: поверхность, полученная вращением параболы вокруг ее оси. Добавим третью координату x , так что ось z по-прежнему является осью симметрии. При вращении y^2 заменяется на квадрат расстояния до оси, то есть на $x^2 + y^2$:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}$$

Фокус находится в точке $S = (0, 0, F)$, а роль директрисы играет плоскость $z = -F$.

3. Как из большой антенны вырезают офсетную

Прямофокусная антенна — это кусок параболоида, симметричный относительно оси: его вырезают цилиндром, ось которого совпадает с осью параболоида. Фокус находится ровно перед центром зеркала и вместе с облучателем затеняет часть поверхности.

Чтобы убрать затенение, кусок параболоида вырезают цилиндром, ось которого параллельна оси параболоида, но смещена в сторону. Получившийся кусок и есть офсетная антенна. Фокус при этом остается тем же (это все тот же параболоид), но оказывается сбоку-снизу от зеркала и ничего не затеняет.

Запишем это формулами. Пусть вырезающий цилиндр имеет радиус a , а его ось проходит через точку $(0, y_0)$ плоскости xy параллельно оси z . Тогда офсетное зеркало — это множество точек параболоида, для которых:

$$x^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2$$

Край зеркала (обод) — это точки, где стоит знак равенства. Считаем, что $y_0 \geq a$: вырез лежит по одну сторону от оси.

Договоримся о названиях краев. Ближняя к оси параболоида часть обода ($y = y_0 - a$) — это нижний край B , дальняя ($y = y_0 + a$) — верхний край T , а две точки с $x = \pm a$ — боковые точки P_+ и P_- .

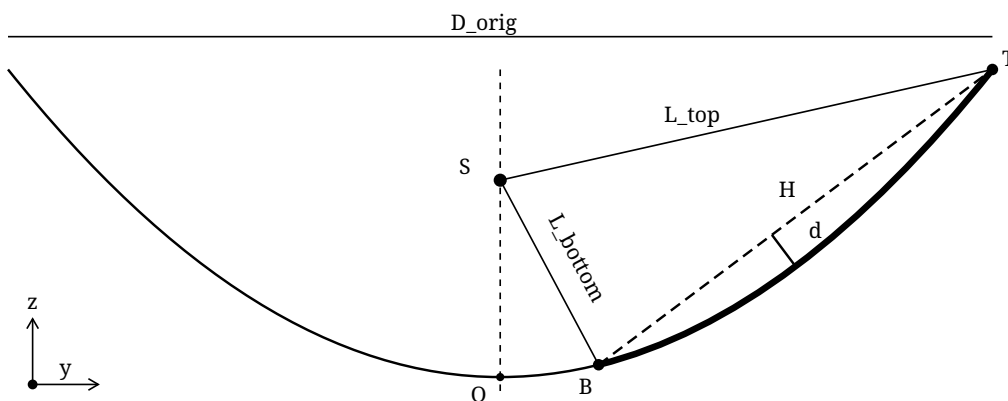


Рис. 2. Вертикальное сечение: большая парабола, вырезанный из нее офсетный кусок (жирная линия), фокус S , края B и T , штриховая линия — след плоскости раскрыва.

4. Край офсетного зеркала лежит в одной плоскости

Мы режем изогнутую поверхность цилиндром, и непонятно, будет ли линия разреза плоской. Проверим.

На ободе выполняется $x^2 = a^2 - (y - y_0)^2$. Подставим это в уравнение параболоида:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F} = \frac{a^2 - (y^2 - 2y_0y + y_0^2) + y^2}{4F}$$

Отсюда:

$$z = \frac{a^2 - y_0^2 + 2y_0y}{4F}$$

Координата x из формулы исчезла, а зависимость от y получилась линейной. Уравнение вида « z = линейная функция от y » задает в пространстве плоскость. Значит, обод офсетного зеркала действительно плоский. Эту плоскость называют плоскостью раскрыва.

4.1. Угол наклона плоскости раскрыва

Найдем угол ψ между плоскостью раскрыва и горизонтальной плоскостью (то есть плоскостью, перпендикулярной оси параболоида).

В уравнении плоскости нет координаты x . Значит, весь наклон приходится на направление y . Угол наклона можно найти по двум точкам обода, лежащим в плоскости симметрии $x = 0$, — по нижнему краю B и верхнему T :

$$z_B = \frac{(y_0 - a)^2}{4F}, \quad z_T = \frac{(y_0 + a)^2}{4F}$$

Их разность по высоте равна:

$$z_T - z_B = \frac{(y_0 + a)^2 - (y_0 - a)^2}{4F} = \frac{4y_0a}{4F} = \frac{y_0a}{F}$$

По горизонтали эти точки разнесены на $(y_0 + a) - (y_0 - a) = 2a$. Тангенс угла наклона — это отношение «подъема» к «пробегу»:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z_T - z_B}{2a} = \frac{y_0a}{F \cdot 2a} = \frac{y_0}{2F}$$

Отсюда:

$$y_0 = 2F \operatorname{tg} \psi$$

5. Форма обода: эллипс

При проецировании наклонной плоской фигуры на горизонтальную плоскость размеры поперек линии наклона (у нас — вдоль оси x) не меняются, а размеры вдоль линии наклона (у нас — вдоль y) сжимаются в $\cos \psi$ раз. Это обычное укорочение при взгляде под углом: отрезок длины ℓ , наклоненный на угол ψ , дает тень длины $\ell \cos \psi$.

Чтобы восстановить истинную форму обода, надо взять его тень — окружность радиуса a — и растянуть ее вдоль y в $1 / \cos \psi$ раз. Из окружности получится эллипс с полуосями a (поперек) и $a / \cos \psi$ (вдоль). Его ширина и высота равны:

$$W = 2a, \quad H = \frac{2a}{\cos \psi} = \frac{W}{\cos \psi}$$

Отсюда получаем угол наклона плоскости раскрыва:

$$\cos \psi = \frac{W}{H}$$

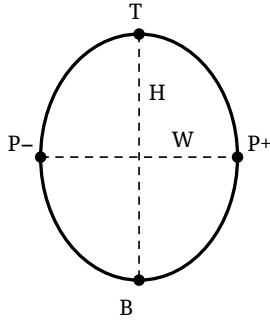


Рис. 3. Вид на зеркало перпендикулярно плоскости раскрыва.

Выразим тангенс угла, пользуясь следствием из основного тригонометрического тождества $1 + \operatorname{tg}^2 \psi = 1 / \cos^2 \psi$:

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{1}{\cos^2 \psi} - 1 = \frac{H^2}{W^2} - 1 = \frac{H^2 - W^2}{W^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{W}$$

6. Глубина зеркала и фокусное расстояние

Свяжем глубину d с фокусным расстоянием. Сначала найдем «вертикальный зазор» между плоскостью раскрыва и поверхностью, а потом пересчитаем его в перпендикулярное расстояние.

6.1. Вертикальный зазор

Возьмем точку зеркала с координатами x, y . Поверхность в этом месте находится на высоте $z_{\text{пов}} = \frac{x^2 + y^2}{4F}$, а плоскость раскрыва (ее уравнение мы нашли в разделе 4) — на высоте $z_{\text{пл}} = \frac{a^2 - y_0^2 + 2y_0 y}{4F}$. Вертикальный зазор между ними:

$$\Delta = z_{\text{пл}} - z_{\text{пов}} = \frac{a^2 - y_0^2 + 2y_0 y - x^2 - y^2}{4F}$$

В числителе выделим полный квадрат: $-y_0^2 + 2y_0 y - y^2 = -(y - y_0)^2$. Получаем:

$$\Delta = \frac{a^2 - x^2 - (y - y_0)^2}{4F}$$

Эта величина положительна внутри выреза и обращается в ноль на ободе (там $x^2 + (y - y_0)^2 = a^2$). Зазор максимален, когда вычитаемое минимально, то есть при $x = 0$ и $y = y_0$ — ровно на оси вырезающего цилиндра. Максимальный вертикальный зазор:

$$\Delta_{\text{max}} = \frac{a^2}{4F}$$

6.2. От вертикального зазора к перпендикулярной глубине

Глубину зеркала меряют не по вертикали (направлению оси материнского параболоида), а по перпендикулярю к плоскости раскрыва.

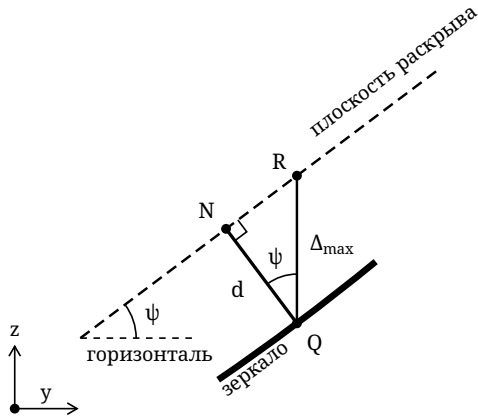


Рис. 4. Дно зеркала крупным планом.

Q — самая глубокая точка поверхности, R — точка плоскости раскрыва над ней, N — основание перпендикуляра, опущенного из Q на плоскость раскрыва. В треугольнике QNR угол при N прямой, а угол при Q равен ψ : вертикаль QR — нормаль к горизонтальной плоскости, QN — нормаль к плоскости раскрыва, а угол между плоскостями равен углу между их нормальными. В самой глубокой точке поверхность параллельна плоскости раскрыва.

Отсюда:

$$d = \Delta_{\max} \cos \psi = \frac{a^2}{4F} \cos \psi$$

6.3. Фокусное расстояние

Подставим $a = W/2$ и $\cos \psi = W/H$:

$$d = \frac{(W/2)^2}{4F} \cdot \frac{W}{H} = \frac{W^2}{16F} \cdot \frac{W}{H} = \frac{W^3}{16FH}$$

Отсюда:

$$F = \frac{W^3}{16Hd}$$

6.4. Смещение выреза

Из раздела 4.1 $y_0 = 2F \tan \psi$. Подставляем F и $\tan \psi$:

$$y_0 = 2 \cdot \frac{W^3}{16Hd} \cdot \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{W} = \frac{W^2 \sqrt{H^2 - W^2}}{8Hd}$$

7. Расстояния от фокуса до краев зеркала

Используем свойство из раздела 2: расстояние от фокуса до точки поверхности равно $z + F$.

7.1. Боковые точки

Боковые точки имеют координаты $x = \pm a$, $y = y_0$. Их высота:

$$z_{\text{side}} = \frac{a^2 + y_0^2}{4F}$$

Тогда:

$$L_{\text{side}} = z_{\text{side}} + F = F + \frac{a^2}{4F} + \frac{y_0^2}{4F}$$

Второе слагаемое, с учетом $a = W/2$ и $F = W^3/(16Hd)$:

$$\frac{a^2}{4F} = \frac{W^2}{16F} = \frac{W^2 \cdot 16Hd}{16 \cdot W^3} = \frac{Hd}{W}$$

В третье слагаемое подставим $y_0 = 2F \operatorname{tg} \psi$:

$$\frac{y_0^2}{4F} = \frac{4F^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{4F} = F \operatorname{tg}^2 \psi$$

Складывая его с первым слагаемым и пользуясь тождеством $1 + \operatorname{tg}^2 \psi = 1 / \cos^2 \psi$, а также равенством $\cos \psi = W/H$:

$$F + F \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{F}{\cos^2 \psi} = F \cdot \frac{H^2}{W^2} = \frac{W^3}{16Hd} \cdot \frac{H^2}{W^2} = \frac{WH}{16d}$$

Итого:

$$L_{\text{side}} = \frac{WH}{16d} + \frac{Hd}{W} = \frac{H(W^2 + 16d^2)}{16dW}$$

7.2. Нижний и верхний края

Нижний край — точка $x = 0$, $y = y_0 - a$. Раскроем квадрат в ее высоте:

$$z_B = \frac{(y_0 - a)^2}{4F} = \frac{y_0^2 + a^2}{4F} - \frac{2ay_0}{4F} = z_{\text{side}} - \frac{ay_0}{2F}$$

Аналогично для верхнего края получится + вместо -. Снова используем $y_0 = 2F \operatorname{tg} \psi$:

$$\frac{ay_0}{2F} = \frac{a \cdot 2F \operatorname{tg} \psi}{2F} = a \operatorname{tg} \psi = \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{W} = \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2}$$

Прибавляя F к высотам, получаем ответы:

$$L_{\text{bottom}} = L_{\text{side}} - \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2} = \frac{H(W^2 + 16d^2)}{16dW} - \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2}$$

$$L_{\text{top}} = L_{\text{side}} + \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2} = \frac{H(W^2 + 16d^2)}{16dW} + \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2}$$

Следствия:

$$L_{\text{top}} - L_{\text{bottom}} = \sqrt{H^2 - W^2}, \quad L_{\text{top}} + L_{\text{bottom}} = 2L_{\text{side}}$$

8. Диаметр материнской прямофокусной антенны

Материнский параболоид должен быть ровно таким, чтобы офсетный вырез доходил до его края. Значит, радиус материнской антенны равен наибольшему расстоянию от ее оси (оси z) до точек обода выреза.

Обод выреза проецируется на горизонтальную плоскость в окружность радиуса a с центром на расстоянии y_0 от оси. Самая дальняя точка такой окружности от оси удалена на $y_0 + a$. Это верхний край T . Поэтому:

$$D_{\text{orig}} = 2(y_0 + a) = 2y_0 + W$$

Подставляя y_0 из раздела 6.4:

$$D_{\text{orig}} = W + \frac{W^2 \sqrt{H^2 - W^2}}{4Hd} = W \left(1 + \frac{W \sqrt{H^2 - W^2}}{4Hd} \right)$$

9. Угол α между направлениями на нижний и верхний края

Рассмотрим треугольник, у которого одна вершина — фокус S , а две другие — нижний и верхний края зеркала, B и T . Все три его стороны нам уже известны:

- $SB = L_{\text{bottom}}$ и $ST = L_{\text{top}}$ — найдены в разделе 7;
- $BT = H$ — обе точки лежат в плоскости раскрыва и являются концами большой оси эллипса.

Когда известны все три стороны, угол находится по теореме косинусов:

$$H^2 = L_{\text{top}}^2 + L_{\text{bottom}}^2 - 2L_{\text{top}}L_{\text{bottom}} \cos \alpha$$

Отсюда можно выразить косинус, но есть способ получить ответ красивее. Для этого выделим полный квадрат: прибавим и вычтем $2L_{\text{top}}L_{\text{bottom}}$:

$$H^2 = (L_{\text{top}} - L_{\text{bottom}})^2 + 2L_{\text{top}}L_{\text{bottom}}(1 - \cos \alpha)$$

По формуле половинного угла $1 - \cos \alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$, поэтому:

$$H^2 - (L_{\text{top}} - L_{\text{bottom}})^2 = 4L_{\text{top}}L_{\text{bottom}} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Разность расстояний мы нашли в разделе 7.2: $L_{\text{top}} - L_{\text{bottom}} = \sqrt{H^2 - W^2}$. Значит, в левой части высота сокращается:

$$H^2 - (H^2 - W^2) = W^2$$

Отсюда:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{W}{2\sqrt{L_{\text{top}}L_{\text{bottom}}}}, \quad \alpha = 2 \arcsin \left(\frac{W}{2\sqrt{L_{\text{top}}L_{\text{bottom}}}} \right)$$

10. Сводка формул

Величина	Формула
Угол наклона плоскости раскрыва	$\psi = \arccos\left(\frac{W}{H}\right)$
Фокусное расстояние	$F = \frac{W^3}{16Hd}$
Смещение оси выреза	$y_0 = \frac{W^2 \sqrt{H^2 - W^2}}{8Hd}$
Фокус — боковые точки	$L_{\text{side}} = \frac{H(W^2 + 16d^2)}{16dW}$
Фокус — нижний край	$L_{\text{bottom}} = L_{\text{side}} - \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2}$
Фокус — верхний край	$L_{\text{top}} = L_{\text{side}} + \frac{\sqrt{H^2 - W^2}}{2}$
Диаметр материнской антенны	$D_{\text{orig}} = W + \frac{W^2 \sqrt{H^2 - W^2}}{4Hd}$
Угол между направлениями из фокуса на нижний и верхний края	$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{W}{2\sqrt{L_{\text{top}}L_{\text{bottom}}}} \right)$